# Итеративное декодирование полярных кодов

В.А. Веселова, В.С. Марковский, Н.В. Степанов, А.А. Фоминых

21 августа 2020 г.

Сириус

# Содержание

1 Итеративное декодирование полярных кодов
- Построение проверочной матрицы полярного кода малой плотности

2 PAC codes

3 Заключение

Сириус

## Основные понятия

# Полярный код

- Полярный код — это линейный блоковый код длины $n = 2^m$ и $k < n$ информационных бит.
- Порождающая матрица полярного кода задаётся кронекеровским произведением матрицы самой на себя $m$ раз:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{\otimes m}$$

- Передача информации осуществляется только по «хорошим» подканалам, для плохих каналов значение передаваемых бит фиксируется, или замораживается. Выбор замороженных бит строится для различных каналов
  - Непосредстенным вычислением вероятностей ошибок (BEC, BSC)
  - С помощью моделирования

## Основные понятия

# Алгоритмы декодирования полярных кодов

- SC (Successive Cancellation)
- SCL (Successive Cancellation List)
- SCL+CRC
  - Замена CRC на сверточное кодирование
- BP (Belief Propagation)
  - Построение проверочной матрицы малой плотности

---


- E. Arikan, "Channel polarization: A method for constructing capacity achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels" // IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 55, no. 7, pp. 3051-3073, 2009.
- I. Tal and A. Vardy, "List decoding of polar codes" // arXiv:1206.0050, May 2012
- E. Arıkan, "Polar codes: A pipelined implementation" // in Proc. 4th Int. Symp. Broad. Commun. (ISBC), pp. 11-14, July 2010


Сириус

# Задачи

- Рассмотрение вариантов построения проверочной матрицы полярного кода с малой плотностью для итеративного декодирования
- Замена CRC на свёртночное кодирование при списочном декодировании полярных кодов

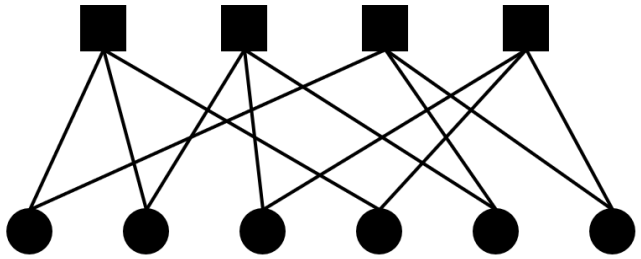
Сириус

# Итеративный алгоритм декодирования

## Алгоритм распространения доверия

- Итеративный посимвольный алгоритм
- Удобно описывается с помощью графа Таннера
- В процессе алгоритма осуществляется передача сообщений между символьными и проверочными узлами

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Как построить проверочную матрицу для полярного кода?

# Плотная матрица из порождающей матрицы

## Пример порождающей матрицы для $F = \{1, 2, 3, 5\}$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## Пример проверочной матрицы

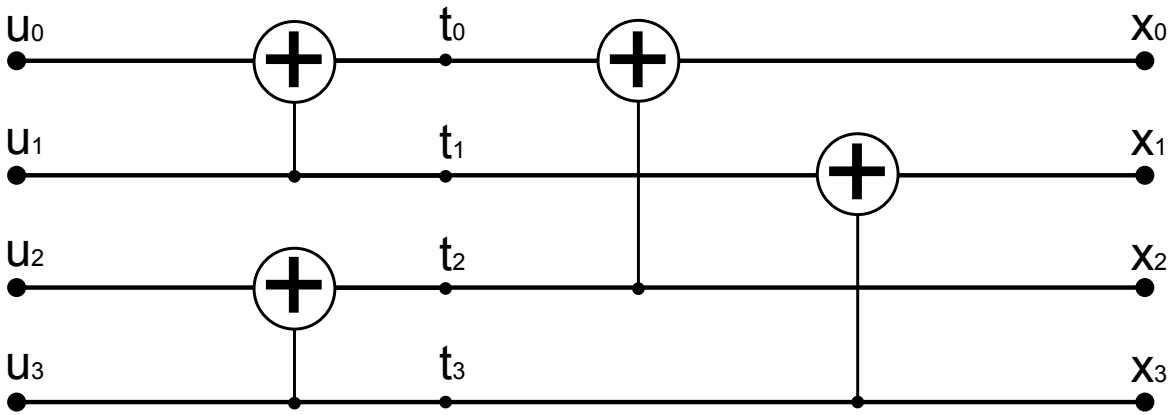
$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверочная матрица, построенная из порождающей, получается плотной.

Сириус

# Разреженная матрица по фактор графу

$u_0, \ldots, u_3$ — узлы сообщения, $t_0, \ldots, t_3$ — скрытые узлы, $x_0, \ldots, x_3$ — узлы кодового слова.



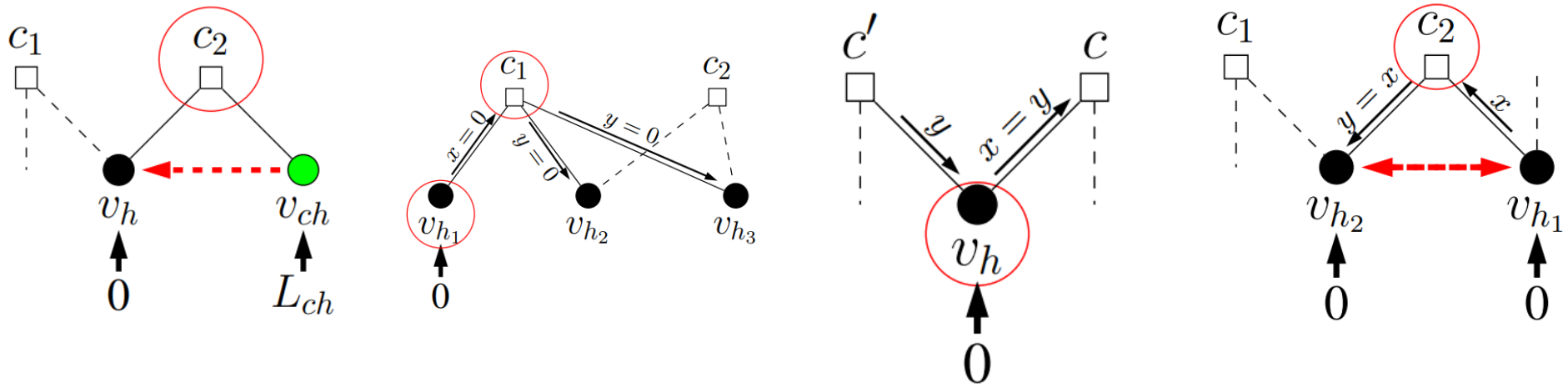

| $u_0$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $t_0$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | 1 | | | | | | | |
| | 1 | | | | 1 | | | | | | |
| | | 1 | 1 | | | 1 | | | | | |
| | | | 1 | | | | 1 | | | | |
| | | | | 1 | | 1 | | 1 | | | |
| | | | | | 1 | | 1 | | 1 | | |
| | | | | | | 1 | | | | 1 | |
| | | | | | | | 1 | | | | 1 |

Сириус

Полученная проверочная матрица имеет большую размерность.

# Belief Propagation

## Методы упрощения структуры графа




Degree-2 CN connected to a degree-1 VNCH

Degree-1 VNH

Degree-2 VNH

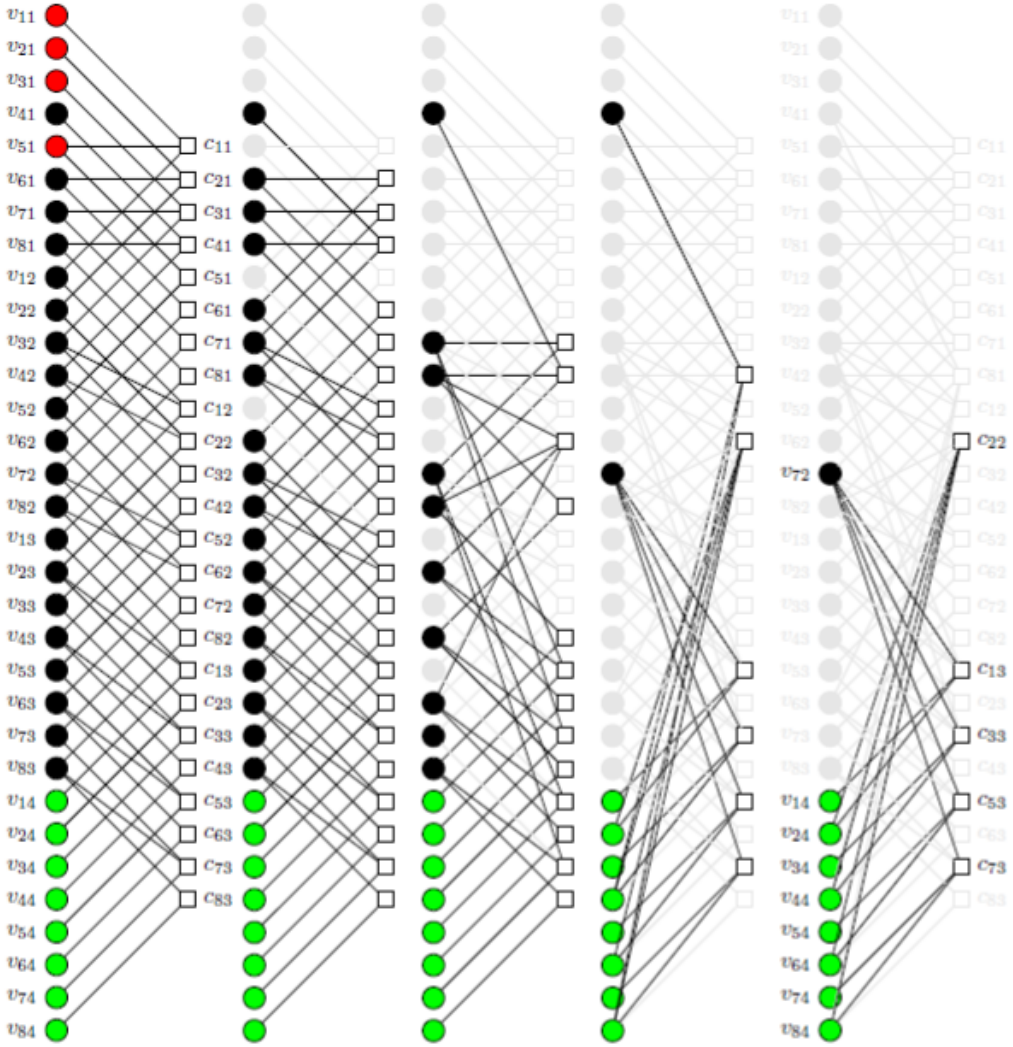
Degree-2 CN connected only to VNH


- S. Cammerer, M. Ebada, A. Elkelesh and S. ten Brink, "Sparse Graphs for Belief Propagation Decoding of Polar Codes" // 2018 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT), Vail, CO, 2018, pp. 1465-1469.


Сириус

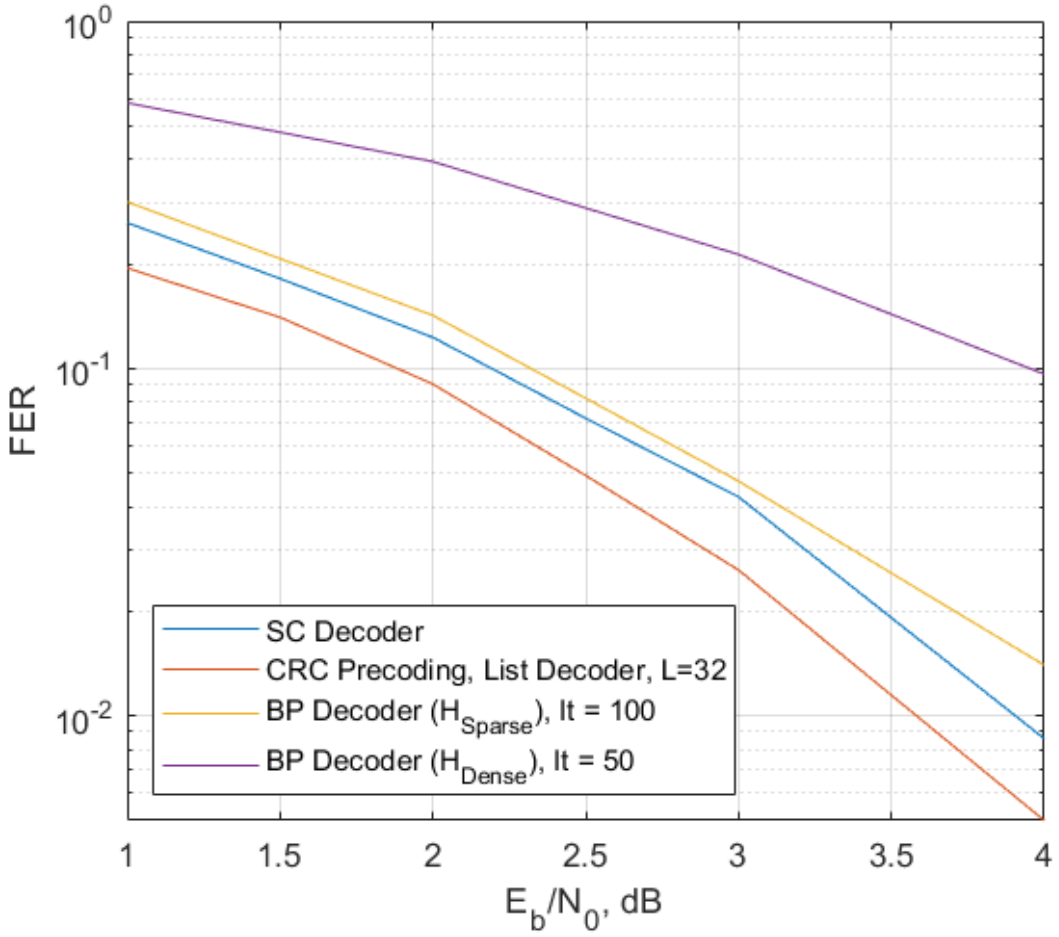
# Пример упрощения структуры графа

Полярный код P(8,4) с A = {4,6,7,8}



# Результаты моделирования

Результаты моделирования для (32,16) полярного кода



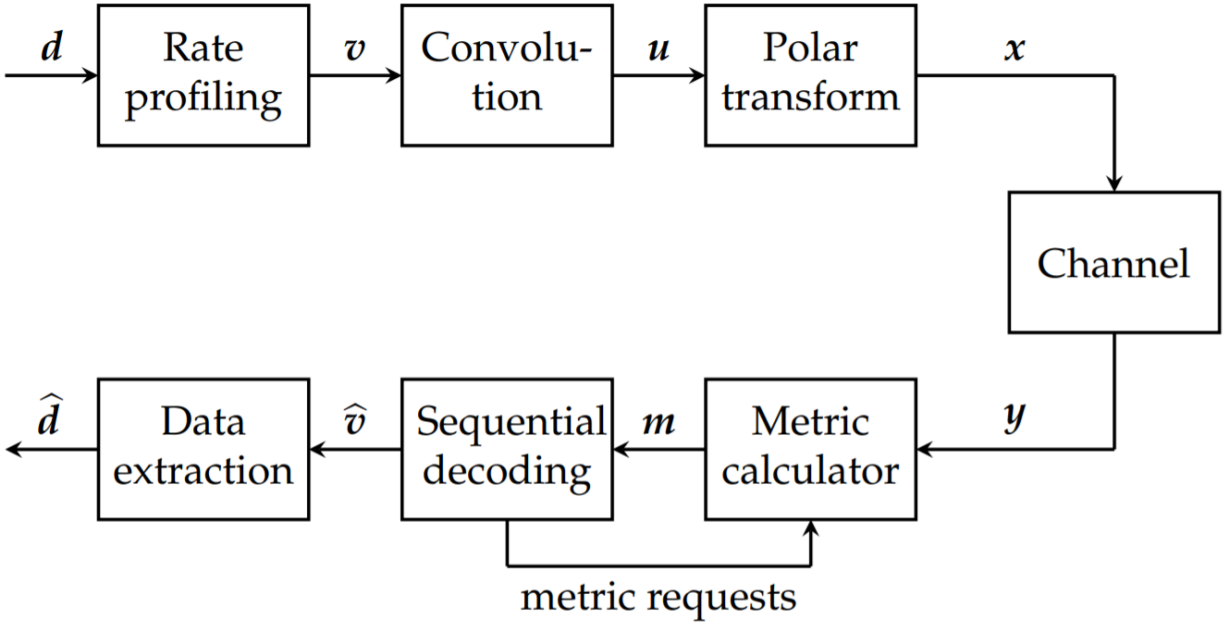
# Задачи

- Варианты построения проверочной матрицы полярного кода с малой плотностью для итеративного декодирования
- Замена CRC на свёртночное кодирование при списочном декодировании полярных кодов

Сириус

# PAC (Polarization-adjusted convolutional codes)

Идея PAC (Polarization-Adjusted Convolutional codes) кодов состоит в замене CRC сверточным кодером.





- Yao, Hanwen, Arman Fazeli, and Alexander Vardy, "List Decoding of Arikan's PAC Codes" // arXiv preprint arXiv:2005.13711 , 2020.

# PAC

Описание алгоритма

- Подготовка сообщения для кодирования

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{d}, \mathbf{v}_F = \mathbf{0}$$

- Кодирование сверточным кодом

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}\mathbf{T}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & \dots & c_m & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & c_0 & c_1 & c_2 \\ \vdots & & & & 0 & c_0 & c_1 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & c_0 \end{bmatrix}$$

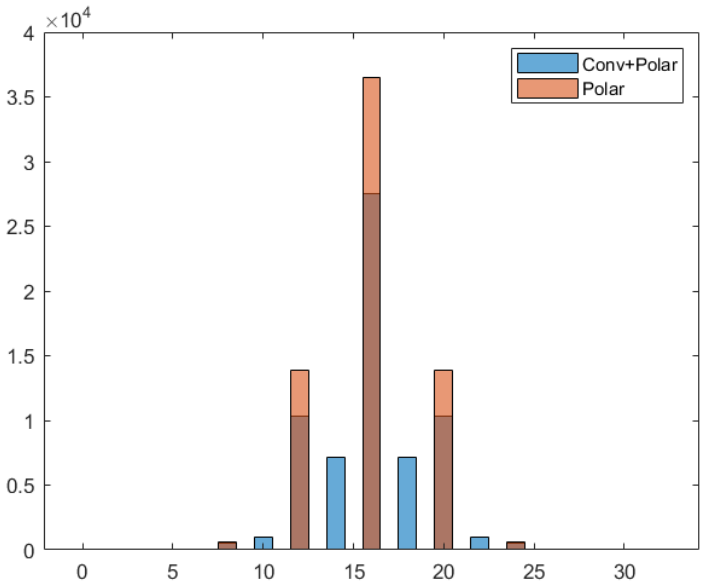
- Кодирование полярным кодом

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}\mathbf{P}$$

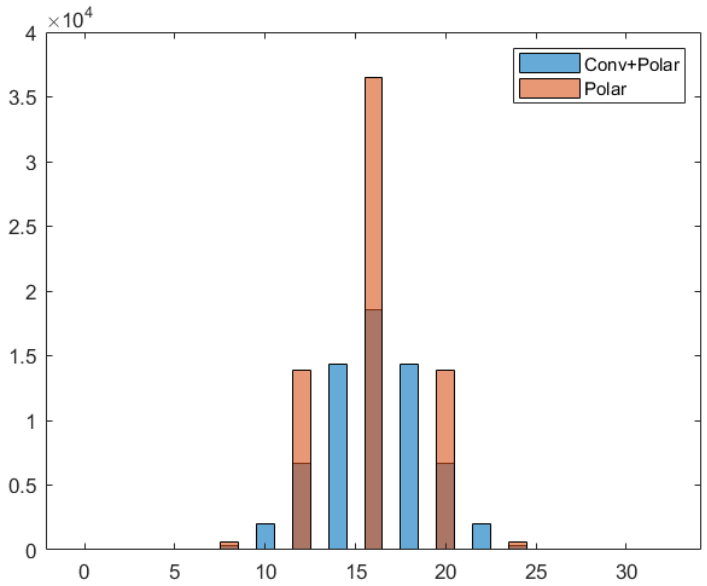
Сириус

# PAC

Спектры PAC кода и полярного кода для N = 32



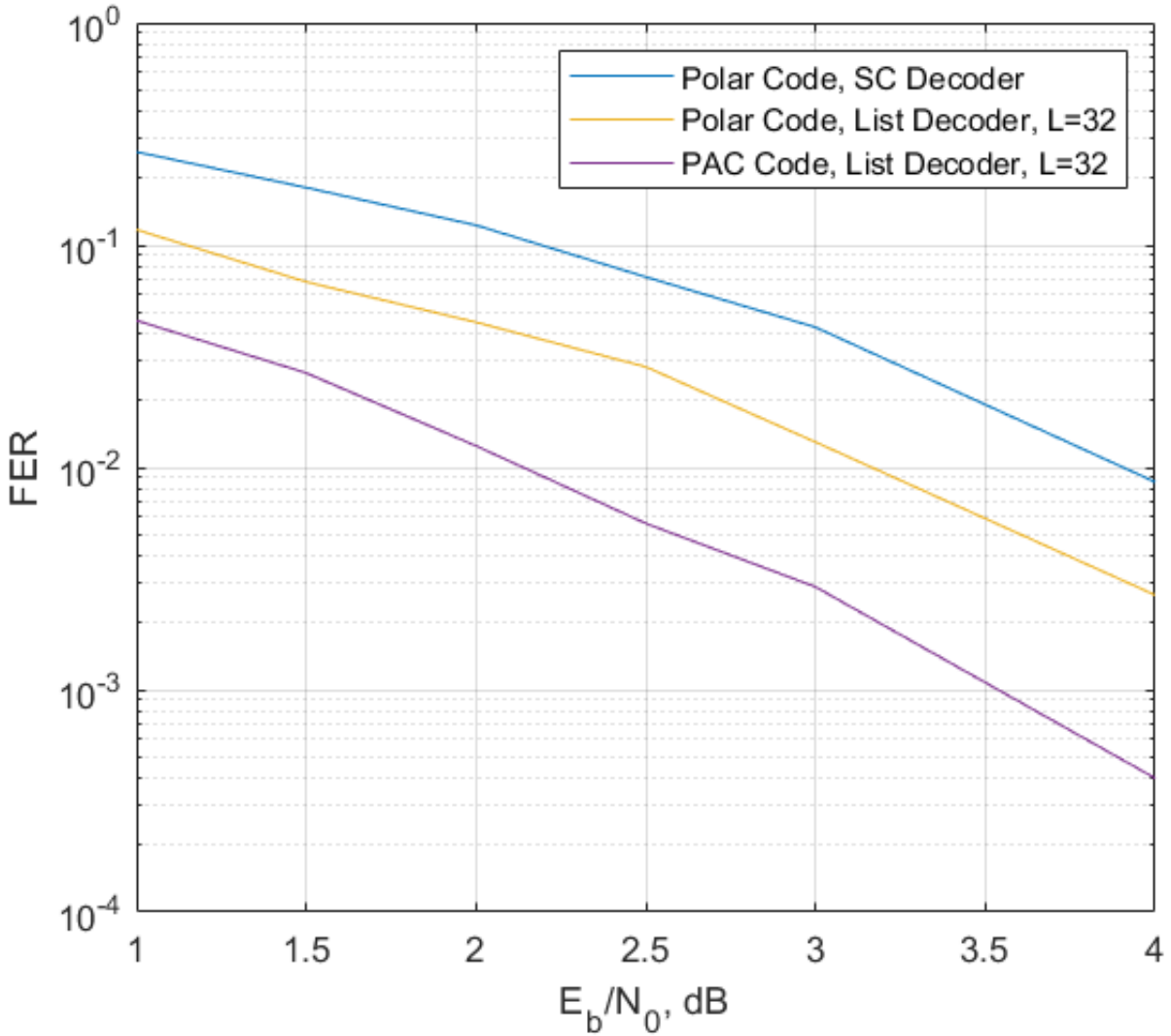

$N = 32,\ m = 3,\ c = (1, 0, 0, 1)$




$N = 32,\ m = 3,\ c = (1, 0, 1, 1),\ c = (1, 1, 0, 1)$

# PAC

Результаты моделирования PAC кода (N = 32) в канале с АБГШ



# Заключение

- Изучены различные варианты построения проверочной матрицы полярного кода с малой плотностью проверок
- Изучен алгоритм декодирования полярных кодов с перестановками
- Реализованы алгоритмы кодирования и декодирования для PAC кодов
- Проведено моделирование в канале с АБГШ для PAC кодов с $N = 32$

Сириус

Спасибо за внимание!